2.1 Formulacao matematica

A equação governante utilizada foi:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)=0$$

Esta equação descreve a transferência de calor por condução em regime permanente em um sistema cilíndrico com simetria angular (sem variação em θ) em coordenadas cilíndricas. O termo da esquerda representa o fluxo de calor radial, e o termo da direita representa o fluxo axial. Não temos o termo de geração de energia.

As condições de contorno consideradas foram as seguintes:

I. $T(R_1,z)=\ T_0\times e^{(-1.5\times\frac{z}{L})}$

II. $-k\frac{\partial T}{\partial r}=h(T-\ T_{amb})$

III. $\frac{\partial T}{\partial z}=0 \qquad (z=0)$

IV. $\frac{\partial T}{\partial z}=0 \qquad (z=L)$

Na primeira condição de contorno levamos em consideração a distribuição de temperatura fornecida no enunciado, valida apenas para a superfície interna com $r=R_1$.

A segunda condição de contorno diz respeito a extremidade do forno, com $r=R_4$, ou seja, igualamos a transferência de calor por condução com a transferência de calor por convecção que ocorre na extremidade externa da parede do forno, em regime permanente.

A terceira e quarta condições de contorno assumem que as extremidades do forno são perfeitamente isoladas. Essa hipótese foi adotada para as extremidades pois o comprimento do forno e muito maior que seu diâmetro, e por isso a perda de calor em sua superfície e muito maior que em suas extremidades, e por isso a perda pelas extremidades foi desconsiderada.

2.2 Discretizacão numérica

A equação governante foi discretizada usando o método das Diferenças Finitas. A malha é definida nas direções radial (*r*) e axial (*z*).

A equação governante foi discretizada usando um método de diferenças finitas centradas de 2ª ordem. Para o termo radial:

$$\frac{1}{r_i}\left[\frac{r_{i+\frac{1}{2}}k_{i+\frac{1}{2}}(T_{i+1,j}-T_{i,j})-r_{i-\frac{1}{2}}k_{i-\frac{1}{2}}(T_{i,j}-T_{i-1,j})}{\Delta r^2}\right]$$

Onde `r` e `k` são calculados:

$$r_{i\pm\frac{1}{2}} = r_i \pm \frac{\Delta r}{2}$$

$$k_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2k_i k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}}$$

`k` e calculado por média harmônica, garantindo continuidade do fluxo térmico nas interfaces entres materiais.

O termo axial foi discretizado como:

$$k_i \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\Delta z^2}$$

Para a malha computacional, valores diferentes dos sugeridos foram utilizados. A malha foi refinada (mais pontos adicionados) para garantir uma simulação mais fiel e continua.

Foram usados 50 nos na direção radial (r) e 100 nos na direção axial (z).

2.3 Equacoes nodais

Nos internos:

$$\alpha_1 T_{i-1,j} + \alpha_2 T_{i,j} + \alpha_3 T_{i+1,j} + \beta(T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) = 0$$

Onde os coeficientes incorporam a geométrica cilíndrica do problema e as propriedades dos materiais. Cada coeficiente interliga um no ao outro, dos lados, acima e abaixo. Os coeficientes são:

$$\alpha_1 = \frac{r_{i-\frac{1}{2}} \cdot k_{i-\frac{1}{2}}}{r_i \cdot (\Delta r)^2}$$

$$\alpha_2 = -\left(\frac{r_{i-\frac{1}{2}} k_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}} k_{i+\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r^2}\right) - \frac{2k_i}{\Delta z^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{r_{i+\frac{1}{2}} \cdot k_{i+\frac{1}{2}}}{r_i \cdot (\Delta r)^2}$$

$$\beta = \frac{k_i}{(\Delta z)^2}$$

Onde `k` e `r` são calculados conforme as expressões apresentadas anteriormente, e os passos espaciais Δr e Δz são calculados diretamente de acordo com o número de nós na malha (pode ser refinado, se necessário). Para as condições de contorno especiais interna e externa, diferentes discretizacoes foram adotadas, bem como as extremidades isoladas (implementadas com nos fantasmas).

Para as condições de contorno:

- Superfície interna:

$$T_{1,j} = 250 \cdot e^{-1.5 \cdot z_j/60}, \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, 100$$

- Superfície externa:

$$\left(\frac{k_{\text{eff}}}{\Delta r} + 30\right) T_{50,j} - \frac{k_{\text{eff}}}{\Delta r} T_{49,j} = 750, \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, 100$$

$$k_{\text{eff}} = \frac{2k_{49}k_{50}}{k_{49} + k_{50}}$$

- Contornos axiais:

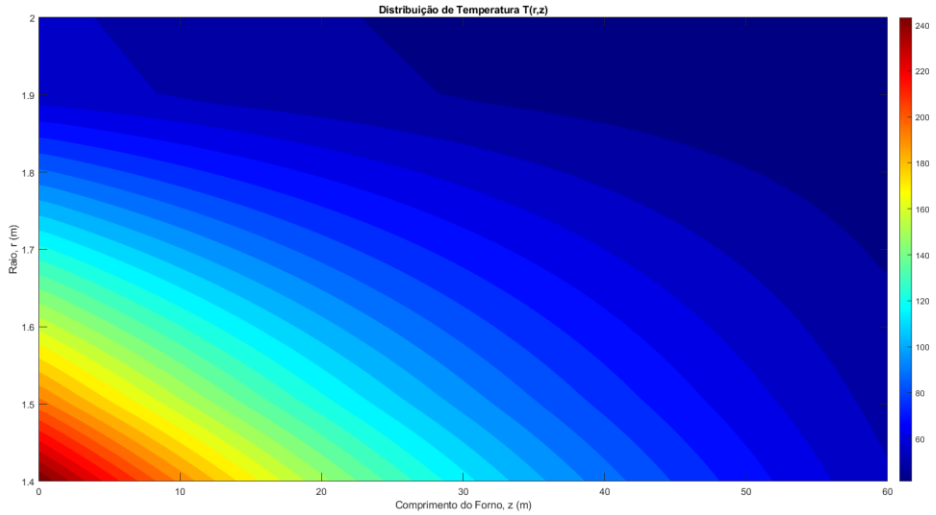
$$\begin{aligned} \text{Base } (z = 0): &\quad \frac{2k_i}{\Delta z^2}(T_{i,2} - T_{i,1}) = 0, \quad \forall\, i = 2, 3, \ldots, 49 \\ \text{Topo } (z = 60): &\quad \frac{2k_i}{\Delta z^2}(T_{i,99} - T_{i,100}) = 0, \quad \forall\, i = 2, 3, \ldots, 49 \end{aligned}$$

Os nos de conto também sofreram um tratamento especial, seguindo as equações de Robin e Dirichlet.

3. Resultados

Foram plotados todos os gráficos requisitados, além de comparativos entre diferentes valores de `k` para os materiais que compõem a parede do forno e como seus valores afetam a distribuição de temperatura.

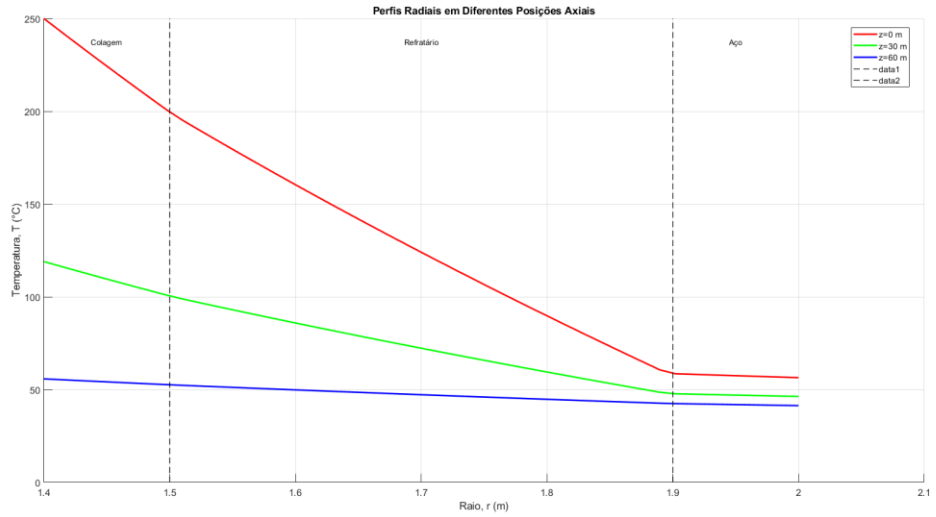
3.1 Distribuição de temperatura Bidimensional



O gráfico mostra a variação térmica ao longo da parede do forno. A temperatura decresce radialmente (de R1 para R4) devido às propriedades isolantes dos materiais, e axialmente (de z=0 para z=60m) seguindo o perfil exponencial imposto na superfície interna.

Regiões mais quentes (vermelho) se concentram próximas a z = 0 e r = R1 pois são mais próximas da zona de queima.

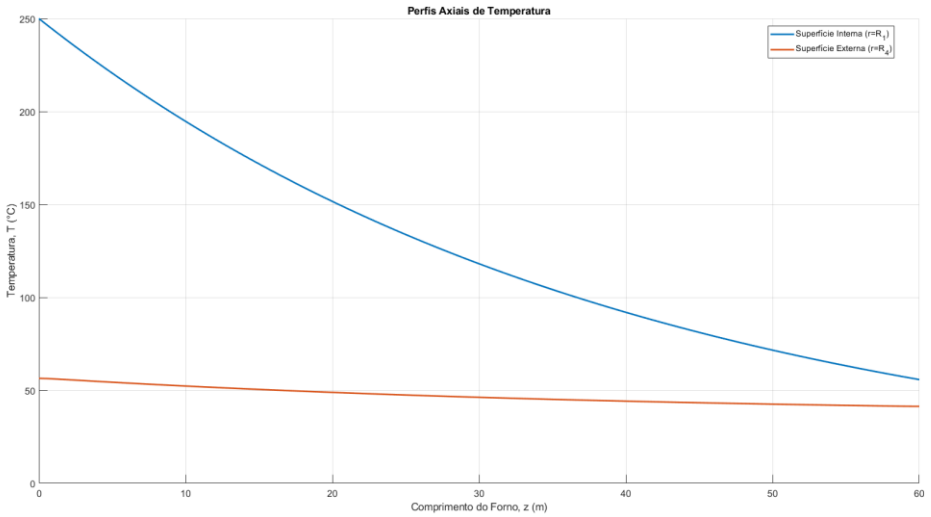
3.2 Perfil radial de temperatura



Podemos analisar, nesse perfil, o efeito quer cada material tem na redução da temperatura, e como o parâmetro `k` se mostra importante. Materiais com `k` maior (como o aço) não contribuem muito para a variação de temperatura, enquanto outros

com menor `k` apresentam um efeito mais significativo, como no caso do refratário, que apresentou uma queda de aproximadamente 150°C devido a sua baixa condutividade. O gráfico foi plotado para 3 valores críticos de z: z = 0, z = 30 e z = 60. Assim, podemos avaliar o perfil radial em três pontos críticos: perto da zona de queima, ponto intermediário do forno e ponto mais extremo do forno. Assim, uma visão geral do comportamento radial e dada, e podemos visualizar melhor o impacto dos valores de `k`

3.3 Perfil axial de temperatura

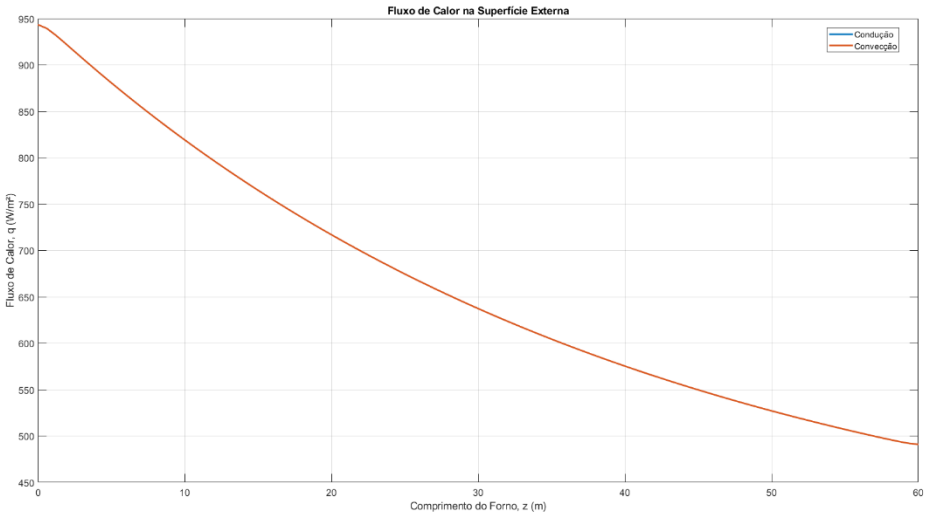


O perfil axial foi plotado tanto para a temperatura interna como externa. O gráfico correspondente a temperatura interna confirma o decaimento exponencial da temperatura ao longo do forno. A taxa de resfriamento e máximo na primeiros 20 metros, refletindo a eficiência da modelagem exponencial (condição de contorno imposta).

A linha que monitora a temperatura externa mostra que a variação já e mais suave, graças as camadas de isolamento impostas, e serve como uma visão geral de segurança e manuseio do forno, indicando áreas mais quentes (mais perigosas) e as menos.

3.4 Fluxo de calor

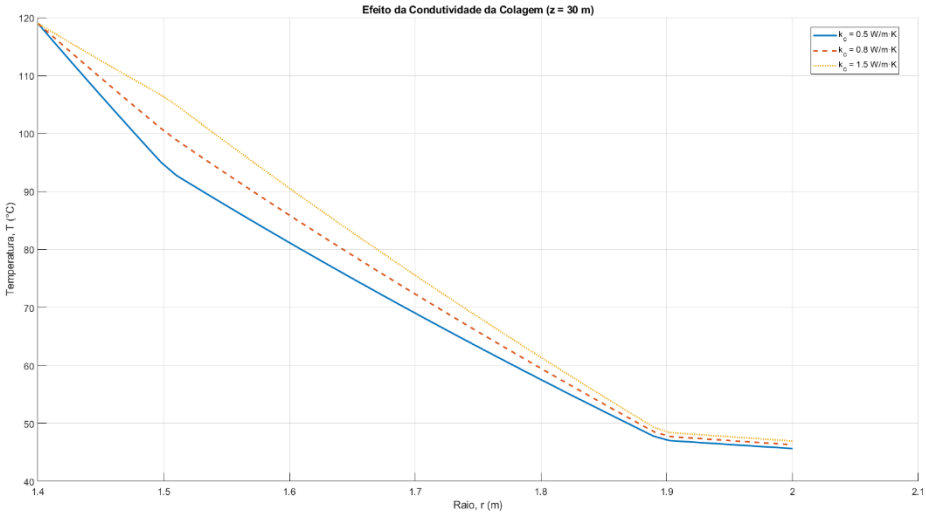
Mostra como se comporta o fluxo de calor na superfície do forno, ou seja, foi plotado apenas para r = R4 e seguindo o comprimento axial do forno. O fluxo e maior na entrada devido a maior diferença de temperatura e decai exponencialmente ao longo do comprimento do forno, comportamento esperado, corresponde ao perfil de temperatura interna.

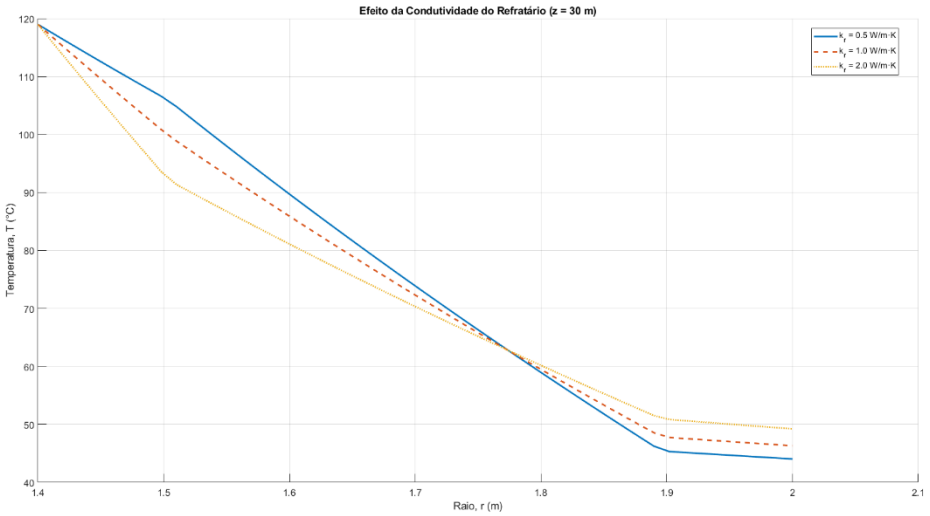


As linhas se sobrepõem, o que indica que o fluxo por condução e idêntico ao fluxo que sai via convecção, indicando que a condição de regime permanente e a condição de contorno 2 estão corretamente aplicadas.

3.5 Efeito das propriedades térmicas

Foram plotados gráficos para diferentes valores de `k` tanto para a parte de colagem quanto para a parte do refratário:





As variações de `k` nos mostram o impacto que essa propriedade tem no perfil de temperatura, alterando não apenas o seu próprio setor, mas também o dos outros materiais. O efeito de `k` nos ajuda também a entender qual material exerce um efeito mais significativo na redução da transferência de calor. Ajuda também a otimizar o projeto, pois fica mais fácil de visualizar quais são os melhores parâmetros para o forno.

3.6 Resultados Importantes

Fluxo médio por condução na face externa: 664.88 W/m^2

Fluxo médio por convecção: 664.88 W/m^2

Diferença relativa: 0.00%

Temperatura média na superfície externa: 47.16 °C

Esses resultados analíticos foram obtidos diretos do código, ressaltam que a condição de contorno na extremidade está sendo seguida, já que o fluxo por condução e igual ao pôr convecção. Retorna também o resultado da temperatura externa média, condizente com o gráfico obtido. A diferença relativa de 0% confirma a condição de regime permanente.